ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA

1) Enunciare il teorema di Rolle
2) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange (o teorema del valor medio)
3) Calcolare il valore dei seguenti limiti
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3-5x^2-6x}$
   b. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-8x^2+6}{x^3+9x}$
   c. $\lim_{x\to \infty} \frac{\log(x)}{x}$
   d. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2}$
   e. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-x}$
   f. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(6x)}{x^2-8x}$
   g. $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{1+4x^2}}$
   h. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
   i. $\lim_{x\to 0} \frac{x-xcos^2 x}{x^3}$
   j. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$
4) Scrivere la formula per calcolare la derivata di un quoziente (ad es. $\frac{f(x)}{g(x)}$)
5) Calcolare le seguenti derivate
   a. $f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x}$
   b. $f(x) = \frac{2x^2-6}{4x^3-12x}$
   c. $f(x) = \frac{\sqrt{x^4-senx}}{e^x}$
   d. $f(x) = 2x\cos^2 x$
   e. $f(x) = e^x senx$
   f. $f(x) = \sqrt{e^x - x^4 + cos4x}$
   g. $f(x) = \frac{e^{x-2}-5cosx}{x^2-2x+1}$
   h. $f(x) = log\,(\cos x - 5x^4)$
   i. $f(x) = \frac{x^2}{\log(e^x)-1}$
   j. $f(x) = x\,e^x cosx$
6) Enunciare e dimostrare il teorema delle media integrale

7) Calcolare il valore dei seguenti integrali

a. $\int (3x + 5x^2 - 6)dx$

b. $\int \left(x^2 - \frac{4}{3}\right) \sin(x^3 - 4x)\, dx$

c. $\int \frac{x}{x^2-5}\, dx$

d. $\int \sqrt{x-5}\, dx$

e. $\int \frac{1}{4+x^2}\, dx$

f. $\int_0^1 \frac{8x-3}{\sqrt{8x^2-6x+1}}\, dx$

g. $\int_4^5 \frac{1}{x^2-5x+6}\, dx$

h. $\int_{-1}^1 x\, dx = 0$, perché?

i. $\int_2^3 \frac{\log(x^2)}{\mathrm{x}}\, dx$

j. $\int_2^5 \frac{x^3-5x}{x^2-1}\, dx$

8) Studiare l'andamento della funzione $y = e^x - 8x + 5$, calcolando anche il valore dell'area sottesa dalla funzione tra x=3 e x=5.

SOLUZIONI

1) **T. di Rolle:** se una funzione è continua nell'intervallo [a,b], derivabile nell'intervallo]a,b[e se f(a)=f(b), allora esiste un punto c appartenente all'intervallo]a,b[tale che la derivata della funzione nel punto c sia uguale a 0. In simboli:
$se\ f(x) continua\ in\ [a,b], derivabile\ in\ ]a,b[\ e\ f(a)=f(b)\ allora\ \exists\ c\ \in]a,b[:\ f'(c)=0$

2) **T. di Lagrange**: se una funzione è continua nell'intervallo [a,b] e derivabile nell'intervallo]a,b[, allora esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la derivata prima è la differenza dei valori della funzione negli estremi fratto la differenza degli estremi. In simboli:
$se\ f(x) continua\ in\ [a,b], derivabile\ in\ ]a,b[\ allora\ \exists\ c\ \in]a,b[:\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Dimostrazione: sia g(x)=f(x)+kx, continua e derivabile in [a,b] perché somma di funzioni continue e derivabili. Ipotizziamo che g(a)=g(b), perciò si avrà f(a)+ka=f(b)+kb. Ricavando k, si avrà $k=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ perciò la funzione $g(x)=f(x)+\frac{f(b)-f(a)}{a-b}x$. Dato che g(a)=g(b), vale il teorema di Rolle, per cui $\exists\ c \in]a,b[:\ g'(c)=0$. Calcolando la derivata, $g'(x)=f'(x)+\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$. Pongo ora g'(c)=0 per trovare il punto in cui la derivata si annulla (Rolle). $f'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{a-b}=0$, ovvero $f'(c)=-\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ che, cambiando il segno al denominatore, diventa $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, C.V.D.

3) Risultati dei limiti
   a. $-\frac{1}{6}$
   b. 1
   c. 0
   d. ∞
   e. 1
   f. $-\infty$
   g. $\frac{3}{2}$
   h. 1
   i. 1
   j. -1

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

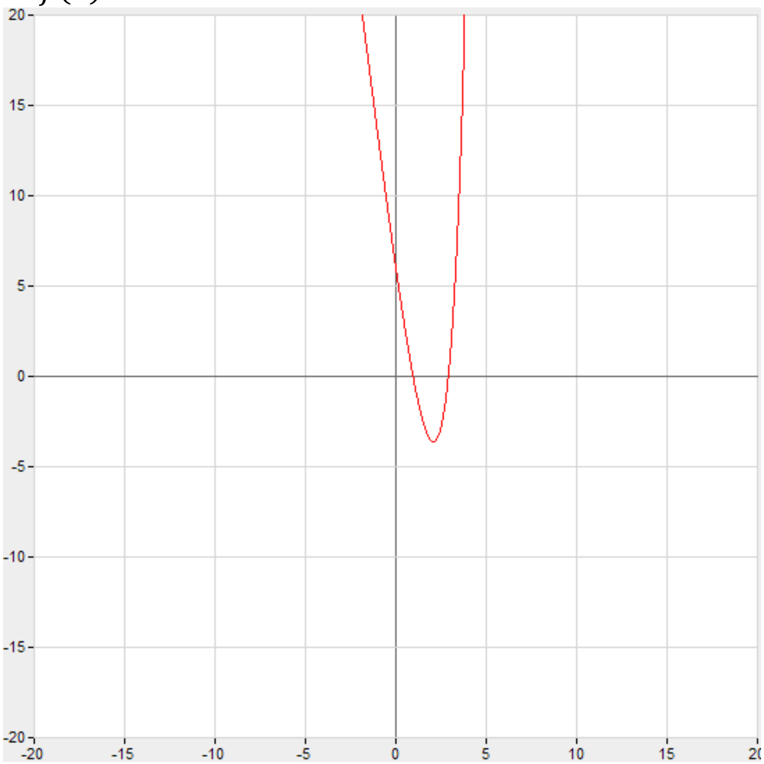
5) Risultati delle derivate
   a. $f'(x)=\cos x$
   b. $f'(x)=-\frac{1}{2x^2}$
   c. $f'(x)=\frac{\frac{4x^3-\cos x}{2\sqrt{x^4-\sin x}}-\sqrt{x^4-\sin x}}{e^x}$
   d. $f'(x)=2\cos^2 x-2\sin x\cos x$
   e. $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$
   f. $f'(x)=\frac{e^x-4x^3-4\sin(4x)}{2\sqrt{e^x-x^4+\cos(4x)}}$
   g. $f'(x)=\frac{(e^{x-2}+5\sin x)(x-1)-2(e^{x-2}-5\cos x)}{(x-1)^3}$
   h. $f'(x)=\frac{-\sin x-20x^3}{\cos x-5x^4}$
   i. $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
   j. $f'(x)=e^x\cos x+xe^x\cos x-xe^x\sin x$

6) **T. della media integrale:** $Se\ f(x)$ è $continua\ in\ [a,b]\ e\ derivabile\ in\ ]a,b[, allora\ \exists\ c \in]a,b[:$
$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c).$

Dimostrazione: dato che ogni minimo relativo è compreso tra il minimo assoluto e il massimo assoluto, si può scrivere che $m \cdot h < m_i \cdot h < M \cdot h$ e anche $n \cdot m \cdot h < s_n < n \cdot M \cdot h$. Dato che $h=(b-a)/n$, si può scrivere $(b-a) \cdot m < s_n < (b-a) \cdot M$. Calcolando i limiti per $n \to \infty$, diventa $(b-a) \cdot m < \int_a^b f(x)dx < (b-a) \cdot M$. Siccome f(x) è continua, assumerà tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo, e quindi anche $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. Perciò, esisterà un c tale che $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ e cioè $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$. C.V.D.

7) Risultati degli integrali
   a. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 - 6x + c$
   b. $F(x) = \frac{1}{3}\cos(x^3 - 4x) + c$
   c. $F(x) = \frac{1}{2}\log(x^2 - 5) + c$
   d. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-5)^3} + c$
   e. $F(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$
   f. $F(x) = \sqrt{8x^2 - 6x + 1} \to F(1) - F(0) = \sqrt{3} - 1$
   g. $F(x) = \log(x-3) - \log(x-2) \to F(3) - f(2) = \log(3)$
   h. $f(x) = x$ è una funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine); si può dimostrare che l'integrale (area sottesa) di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, come [-1,1], vale sempre 0.
   i. $F(x) = \frac{1}{4}\log^2(x^2) \to F(3) - F(2) = \frac{1}{4}(\log^2(9) - \log^2(4))$
   j. $F(x) = x^2 - 2\log(x^2 - 1) \to F(5) - F(2) = 21 + 2(\log(3) - \log(24))$

8) Il grafico della funzione $f(x) = e^x - 8x + 5$ è:



Calcolare l'area sottesa dalla funzione tra 3 e 5 significa calcolare il valore di $\int_3^5 (e^x - 8x + 5)\, dx$
$F(x) = e^x - 4x^2 + 5x \to F(5) - F(3) = e^5 - e^3 - 54$